Infinite Combinatorics

Παναγιώτης Πατσιλινάκος

ΕΜΕ

20 Ιουνίου 2017

1. Προαπαιτούμενα
   - Διατακτικοί αριθμοί
   - Πληθάριθμοι
2. Εισαγωγή
   - Ορισμοί
   - Λίγη πεπερασμένη θεωρία *Ramsey*
3. Άπειρη θεωρία *Ramsey*
   - Πρώτα αποτελέσματα
   - Θεώρημα *Ramsey*
   - Πέρα από το ω
   - Άπειρα χρώματα
   - Λίγα εξτρά

Βασικές έννοιες συνολοθεωρίας (I)

- **Γραμμική διάταξη (Total order)**: Μια δυαδική σχέση σε ένα σύνολο X (συμβ. $\leq$), που είναι **αντισυμμετρική**, **μεταβατική** και **ολική** ($\implies$ ανακλαστική).
- **Μερική διάταξη (Partial order)**: **αντισυμμετρική**, **μεταβατική** και **ανακλαστική** (όχι υποχρεωτικά ολική).
- **¨Καλή' διάταξη (well-order)**: Σε ένα σύνολο S είναι μια γραμμική διάταξη στο S τ.ω. κάθε μη κενό υποσύνολο του S έχει **ελάχιστο στοιχείο** σε αυτή τη διάταξη.
- Αξίωμα της επιλογής $\implies$ κάθε σύνολο επιδέχεται καλής διάταξης (ZF);

Διατακτικοί Αριθμοί (I)

Γενίκευση της έννοιας ενός φυσικού αριθμού που χρησιμοποιήται για την περιγραφή του τρόπου οργάνωσης συλλογής αντικειμένων σε σειρά.

Διατακτικοί Αριθμοί (I)

Γενίκευση της έννοιας ενός φυσικού αριθμού που χρησιμοποιήται για την περιγραφή του τρόπου οργάνωσης συλλογής αντικειμένων σε σειρά.

Ορισμός

Δεδομένων δυο μερικώς διατεταγμένων συνόλων $(S, \leq_S)$ και $(T, \leq_T)$, **διατακτικός ισομορφισμός (order isomorphism)** από το $(S, \leq_S)$ στο $(T, \leq_T)$ ονομάζεται μια 1-1 συνάρτηση f από το S στο T με την ιδιότητα ότι, για κάθε $x, y \in S$, $x \leq_S y$ ανν $f(x) \leq_T f(y)$.

Διατακτικοί Αριθμοί (I)

Γενίκευση της έννοιας ενός φυσικού αριθμού που χρησιμοποιήται για την περιγραφή του τρόπου οργάνωσης συλλογής αντικειμένων σε σειρά.

Ορισμός

Δεδομένων δυο μερικώς διατεταγμένων συνόλων $(S, \leq_S)$ και $(T, \leq_T)$, **διατακτικός ισομορφισμός (order isomorphism)** από το $(S, \leq_S)$ στο $(T, \leq_T)$ ονομάζεται μια 1-1 συνάρτηση f από το S στο T με την ιδιότητα ότι, για κάθε $x, y \in S$, $x \leq_S y$ ανν $f(x) \leq_T f(y)$.

- Ουσιαστικά, τα δυο παραπάνω σύνολα είναι το ίδιο σύνολο με άλλες ¨ετικέτες¨.

Διατακτικοί Αριθμοί (I)

Γενίκευση της έννοιας ενός φυσικού αριθμού που χρησιμοποιήται για την περιγραφή του τρόπου οργάνωσης συλλογής αντικειμένων σε σειρά.

Ορισμός

Δεδομένων δυο μερικώς διατεταγμένων συνόλων $(S, \leq_S)$ και $(T, \leq_T)$, **διατακτικός ισομορφισμός (order isomorphism)** από το $(S, \leq_S)$ στο $(T, \leq_T)$ ονομάζεται μια 1-1 συνάρτηση f από το S στο T με την ιδιότητα ότι, για κάθε $x, y \in S$, $x \leq_S y$ ανν $f(x) \leq_T f(y)$.

- Ουσιαστικά, τα δυο παραπάνω σύνολα είναι το ίδιο σύνολο με άλλες ¨ετικέτες¨.
- Ψάχνουμε για σύνολα που ¨εκπροσωπούν' κάθε κλάση ισομορφικών συνόλων.

Διατακτικοί Αριθμοί (II)

Κατά von Neumann:

Ορισμός

Ένα σύνολο S είναι διατακτικό ανν η σχέση $\in$ είναι γνησίως καλή διάταξη για το S ($\langle S, \in \rangle$) και το S είναι μεταβατικό $((\forall x)(x \in S \to x \subseteq S))$.

Διατακτικοί Αριθμοί (II)

Κατά von Neumann:

Ορισμός

Ένα σύνολο S είναι διατακτικό ανν η σχέση $\in$ είναι γνησίως καλή διάταξη για το S ($\langle S, \in \rangle$) και το S είναι μεταβατικό ($(\forall x)(x \in S \to x \subseteq S)$).

Οι φυσικοί αριθμοί κατά von Neumann:
Το μηδέν αναπαρίσταται από το κενό σύνολο και κάθε επόμενος αριθμός είναι η ένωση όλων των προηγουμένων. πχ.

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset \\ 1 = \{0\} &= \{\emptyset\} \\ 2 = \{0,1\} &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ 3 = \{0,1,2\} &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \end{aligned}$$

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς, οι φυσικοί αριθμοί είναι διατακτικοί.

Διατακτικοί Αριθμοί (III)

Ο πρώτος άπειρος διατακτικός

Το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι καλώς διατεταγμένο, που σημαίνει ότι υπάρχει ένας διατακτικός που το αντιπροσωπεύει. Ονομάζουμε αυτόν τον διατακτικό αριθμό ω.

Διατακτικοί Αριθμοί (III)

Ο πρώτος άπειρος διατακτικός

Το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι καλώς διατεταγμένο, που σημαίνει ότι υπάρχει ένας διατακτικός που το αντιπροσωπεύει. Ονομάζουμε αυτόν τον διατακτικό αριθμό ω.

Διάδοχοι και οριακοί διατακτικοί

- Κάθε διατακτικός έχει ως ελάχιστο στοιχείο το 0.
- Κάποιοι διατακτικοί έχουν μέγιστο στοιχείο. Πχ ο διατακτικός 2 έχει ως μέγιστο στοιχείο το 1. Σε αυτή την περίπτωση, αν ένας διατακτικός έχει μέγιστο στοιχείο α είναι ο επόμενος διατακτικός μετά τον α και ονομάζεται διάδοχος (successor) του α, συμβολίζεται ως $\alpha + 1$ και ορίζεται ως $\alpha \cup \{\alpha\}$
- Διατακτικοί όπως ο ω δεν έχουν μέγιστο στοιχείο (δηλ. $(\forall \alpha < \omega)(\exists \beta)(\alpha < \beta < \omega)$) και έτσι δεν είναι διάδοχοι. Αυτοί, ονομάζονται οριακοί διατακτικοί.

Διατακτικοί Αριθμοί (IV)

Παραδείγματα διάδοχων και οριακών διατακτικών

Διάδοχοι

- $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$
- $\omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \omega + 4, \ldots$
- $\omega \times 2 + 1, \omega \times 2 + 2, \omega \times 2 + 3, \omega \times 2 + 4, \ldots$
- $\ldots$

Οριακοί

- $\omega, \omega \times 2, \omega \times 3, \omega \times 4, \ldots$
- $\omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \ldots$
- $\omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots$
- $\ldots$

Πληθάριθμοι (I)

- «Αναπαριστούν» το «μέγεθος» (πλήθος) στοιχείων ενός συνόλου.

Πληθάριθμοι (I)

- «Αναπαριστούν» το «μέγεθος» (πλήθος) στοιχείων ενός συνόλου.
- Δυο σύνολα X, Y για τα οποία υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : X \to Y$ λέμε είναι ισοπληθικά (έχουν το ίδιο cardinality).
- Όπως και με τους διατακτικούς, θέλουμε σύνολα που εκπροσωπούν τις διάφορες «κλάσεις μεγεθών» Αυτά τα σύνολα είναι οι πληθάριθμοι.

Πληθάριθμοι (II)

Ορισμός

Δεδομένου του αξιώματος της επιλογής (γιατί;), ο πληθάριθμος που συσχετίζεται με ένα σύνολο X (cardinality του X),($|X|$), είναι ο ελάχιστος διατακτικός α για τον οποίο υπάρχει μια 1-1 και επί συνάρτηση $f : X \to \alpha$.

Πληθάριθμοι (II)

Ορισμός

Δεδομένου του αξιώματος της επιλογής (γιατί;), ο πληθάριθμος που συσχετίζεται με ένα σύνολο X (cardinality του X),($|X|$), είναι ο ελάχιστος διατακτικός α για τον οποίο υπάρχει μια 1-1 και επί συνάρτηση $f : X \to \alpha$.

Παρατηρούμε ότι οι πληθάριθμοι είναι διατακτικοί, αλλά όχι όλοι.
Οι διατακτικοί αριθμοί, είναι σχετικοί και με κάποια διάταξη, κάτι που δεν ισχύει για τους πληθαρίθμους. πχ.

$$1 + \omega = \omega < \omega + 1$$
$$|\omega| = |\omega + 1| = \aleph_0$$

Πληθάριθμοι (II)

Ορισμός

Δεδομένου του αξιώματος της επιλογής (γιατί;), ο πληθάριθμος που συσχετίζεται με ένα σύνολο X (cardinality του X),($|X|$), είναι ο ελάχιστος διατακτικός α για τον οποίο υπάρχει μια 1-1 και επί συνάρτηση $f : X \to \alpha$.

Παρατηρούμε ότι οι πληθάριθμοι είναι διατακτικοί, αλλά όχι όλοι. Οι διατακτικοί αριθμοί, είναι σχετικοί και με κάποια διάταξη, κάτι που δεν ισχύει για τους πληθαρίθμους. πχ.

$$1 + \omega = \omega < \omega + 1$$
$$|\omega| = |\omega + 1| = \aleph_0$$

- Όταν λέμε $|X| \leq |Y|$ εννοούμε ότι υπάρχει 1-1 (όχι υπ. επί) $f : X \to Y$. Από AC, $(\forall X, Y)$ $(|X| \leq |Y| \vee |Y| \leq |X|)$, $(\Rightarrow)$ οι άπειροι πληθάριθμοι $(\aleph)$ διατάσσονται με δείκτες τους διατακτ.

Πληθάριθμοι (II)

Ορισμός

Δεδομένου του αξιώματος της επιλογής (γιατί;), ο πληθάριθμος που συσχετίζεται με ένα σύνολο X (cardinality του X),($|X|$), είναι ο ελάχιστος διατακτικός α για τον οποίο υπάρχει μια 1-1 και επί συνάρτηση $f : X \to \alpha$.

Παρατηρούμε ότι οι πληθάριθμοι είναι διατακτικοί, αλλά όχι όλοι.
Οι διατακτικοί αριθμοί, είναι σχετικοί και με κάποια διάταξη, κάτι που δεν ισχύει για τους πληθαρίθμους. πχ.

$$1 + \omega = \omega < \omega + 1$$
$$|\omega| = |\omega + 1| = \aleph_0$$

- Όταν λέμε $|X| \leq |Y|$ εννοούμε ότι υπάρχει 1-1 (όχι υπ. επί) $f : X \to Y$. Από AC, $(\forall X, Y)$ $(|X| \leq |Y| \vee |Y| \leq |X|)$, $(\Rightarrow)$ οι άπειροι πληθάριθμοι $(\aleph)$ διατάσσονται με δείκτες τους διατακτ.
- **Υπόθεση του συνεχούς**: $2^{\aleph_0} (= \mathbb{R}) = \aleph_1$

Cofinality

(Την ορίζουμε για πληθαρίθμους)

Ορισμός (ασθενής)

Αν κ, άπειρος πληθάριθμος, τότε το cofinality του, $cf(k)$ είναι ο ελάχιστος **πληθάριθμος**, τέτοιος ώστε να υπάρχει μια **μη φραγμένη** συνάρτηση από το $cf(k)$ στο k. Αλλιώς, το $cf(k)$ είναι η πληθικότητα του μικρότερου συνόλου από πληθαρίθμους αυστηρά μικρότερους του k των οποίων το άθροισμα είναι k.

$$cf(k) = min\left\{ card(I) | k = \sum_{i \in I} \lambda_i \wedge (\forall i)(\lambda_i < k) \right\}$$

- Δηλαδή, αν $cf(k) = \lambda$, τότε υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $(k_i)_{i<\lambda}$, τέτοια ώστε $sup\{k_i : i < \lambda\} = k$.
- Ένας πληθάριθμος για τον οποίο ισχύει $cf(k) = k$ ονομάζεται **κανονικός**.

Δένδρα

Ορισμός

Δένδρο είναι μια μερική διάταξη $\langle T, \leq_T \rangle$ τέτοια ώστε για κάθε $t \in T$ το αρχικό τμήμα $\hat{t} = \{s \in T : s <_T t\}$ είναι καλώς διατεταγμένο από τη σχέση $\leq_T$ (είναι κλαδί με ρίζα).

- Το **ύψος ενός κόμβου** $t \in T$, $ht(t)$, είναι το **order type** του $\hat{t}$.
- Το **ύψος ενός δένδρου** T είναι ο διατακτικός αριθμός $ht(T) = sup\{ht(t) + 1 : t \in T\}$.
- Επιπλέον, για διατακτικό α ορίζουμε

$$\begin{aligned} T(\alpha) &= \{t \in T : ht(t) = \alpha\} \\ T_{(\alpha)} &= \{t \in T : ht(t) < \alpha\} \end{aligned}$$

Εισαγωγή

Θεωρία Ramsey

Η **θεωρία Ramsey** μελετάει κατατμήσεις (partitions) μαθηματικών αντικειμένων (στην προκειμένη περίπτωση συνόλων) θέτοντας το εξής ερώτημα: Πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το αρχικό αντικείμενο έτσι ώστε να εγγυάται ότι, σε κάθε κατάτμησή του, τουλάχιστον κάποια κομμάτια της κατάτμησης έχουν κάποια ιδιότητα.

Εισαγωγή

Θεωρία Ramsey

Η **θεωρία Ramsey** μελετάει κατατμήσεις (partitions) μαθηματικών αντικειμένων (στην προκειμένη περίπτωση συνόλων) θέτοντας το εξής ερώτημα: Πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το αρχικό αντικείμενο έτσι ώστε να εγγυάται ότι, σε κάθε κατάτμησή του, τουλάχιστον κάποια κομμάτια της κατάτμησης έχουν κάποια ιδιότητα.

Παράδειγμα

Η αρχή του περιστεριώνα. Αν p περιστέρια μπουν σε m περιστεροφωλιές, με $m > p$, τότε τουλάχιστον μια περιστεροφωλιά περιέχει τουλάχιστον 2 περιστέρια. Ή, αντίστροφα, ο αριθμός των περιστεριών (p) πρέπει να ξεπερνά τον αριθμό των περιστεροφωλιών (m) για να εγγυηθούμε αυτή την ιδιότητα.

Ορισμοί (I)

Ορισμός

Δεδομένου ενός συνόλου A ορίζουμε ως $[A]^\rho$ την οικογένεια των υποσυνόλων του A με πληθάριθμο ρ. (**πλήρης υπεργράφος του** A)

Ορισμοί (I)

Ορισμός

Δεδομένου ενός συνόλου A ορίζουμε ως $[A]^\rho$ την οικογένεια των υποσυνόλων του A με πληθάριθμο ρ. (**πλήρης υπεργράφος του** A)

Ορισμός

Μια «δειγματοδεικτούμενη»(?)(indexed) οικογένεια $P = \{P_i : i \in I\}$ ονομάζεται **κατάτμηση (partition)** μιας οικογένειας συνόλων $[A]^\rho$ αν:

$$\bigcup\{P_i : i \in I\} = [A]^\rho \text{και } P_i \cap P_k = \emptyset \text{ για } i, k \in I, i \neq k$$

Ορισμοί (I)

Ορισμός

Δεδομένου ενός συνόλου A ορίζουμε ως $[A]^\rho$ την οικογένεια των υποσυνόλων του A με πληθάριθμο ρ. (**πλήρης υπεργράφος του** A)

Ορισμός

Μια «δειγματοδεικτούμενη»(?)(indexed) οικογένεια $P = \{P_i : i \in I\}$ ονομάζεται **κατάτμηση (partition)** μιας οικογένειας συνόλων $[A]^\rho$ αν:

$$\bigcup\{P_i : i \in I\} = [A]^\rho \text{και } P_i \cap P_k = \emptyset \text{ για } i, k \in I, i \neq k$$

Ορισμός

Έστω $f_P : [A]^\rho \to I$ η (μοναδική) συνάρτηση f με $f^{-1}\{i\} = P_i$, για κάθε $i \in I$. Καλούμε την f_P τον **κανονικό χρωματισμό που συσχετίζεται με την** P.

Ορισμοί (II)

Ορισμός

Ένα σύνολο Y είναι **ομογενές** για την κατάτμηση P (του $[X]^\rho$ και τον χρωματισμό που είναι συσχετισμένος μ΄ αυτήν) αν υπάρχει $i_0 \in I$ τέτοιο ώστε $[Y]^\rho \subseteq P_{i_0}$.

Ορισμοί (II)

Ορισμός

Ένα σύνολο Y είναι **ομογενές** για την κατάτμηση P (του $[X]^\rho$ και τον χρωματισμό που είναι συσχετισμένος μ΄ αυτήν) αν υπάρχει $i_0 \in I$ τέτοιο ώστε $[Y]^\rho \subseteq P_{i_0}$.

Ορισμός (Erdos, Rado)

Έστω $\kappa, \lambda, \rho, \sigma$ πληθάριθμοι. Ο συμβολισμός:

$$\kappa \to (\lambda)^\rho_\sigma$$

σημαίνει:

Αν X ένα σύνολο πληθικότητας κ, I ένα σύνολο πληθικότητας σ και $P = \{P_i : i \in I\}$ μια κατάτμηση του $[X]^\rho$, υπάρχει $Y \subseteq X$ με $|Y| = \lambda$ που είναι **ομογενές** για την P.

Λίγη πεπερασμένη θεωρία Ramsey (I)

Αρχή του περιστεριώνα με συμβολισμό Ramsey:
Αν p, n, m πεπερασμένοι πληθάριθμοι και $p > m$, $n = 2$ ($\exists n \geq 2$), τότε:

$$p \to (n)^1_m$$

Λίγη πεπερασμένη θεωρία Ramsey (I)

Αρχή του περιστεριώνα με συμβολισμό Ramsey:
Αν p, n, m πεπερασμένοι πληθάριθμοι και $p > m$, $n = 2$ ($\exists n \geq 2$), τότε:

$$p \to (n)^1_m$$

Θα υπήρχε κατάλληλος πεπερασμένος πληθάριθμος για το αριστερό μέλος, όποιοι κι αν ήταν οι (πεπερασμένοι) πληθάριθμοι του δεξιού μέλους;

Λίγη πεπερασμένη θεωρία Ramsey (II)

(Πεπερασμένο) Θεώρημα Ramsey

Έστω m, k, l φυσικοί αριθμοί, υπάρχει φυσικός αριθμός n, τ.ω.:

$$n \to (m)^k_l$$

Λίγη πεπερασμένη θεωρία Ramsey (II)

(Πεπερασμένο) Θεώρημα Ramsey

Έστω m, k, l φυσικοί αριθμοί, υπάρχει φυσικός αριθμός n, τ.ω.:

$$n \to (m)^k_l$$

Ορισμός

Ένα υποσύνολο $A \subseteq \omega$ καλείται **σχετικά μεγάλο** αν $|A| \geq min\ A$.

Γράφουμε $n \overset{*}{\to} (m)^k_l$ αν για κάθε χρωματισμό $f : [n]^k \to l$ υπάρχει ένα σχετικά μεγάλο ομογενές σύνολο μεγέθους τουλάχιστον m.

Λίγη πεπερασμένη θεωρία Ramsey (II)

(Πεπερασμένο) Θεώρημα Ramsey

Έστω m, k, l φυσικοί αριθμοί, υπάρχει φυσικός αριθμός n, τ.ω.:

$$n \to (m)^k_l$$

Ορισμός

Ένα υποσύνολο $A \subseteq \omega$ καλείται **σχετικά μεγάλο** αν $|A| \geq min\ A$.

Γράφουμε $n \xrightarrow{*} (m)^k_l$ αν για κάθε χρωματισμό $f : [n]^k \to l$ υπάρχει ένα σχετικά μεγάλο ομογενές σύνολο μεγέθους τουλάχιστον m.

Θεώρημα (Paris-Harrington)

Για κάθε $m, k, l \in \omega \setminus \{0\}$ υπάρχει $n \in \omega$, τέτοιο ώστε $n \xrightarrow{*} (m)^k_l$.

Λίγη πεπερασμένη θεωρία Ramsey (III)

Λίγη ακόμα ορολογία

- Για $m, k, l \in \omega \setminus \{0\}$ αναπαριστούμε ως $R(m, k, l)$ τον ελάχιστο φυσικό αριθμό n για τον οποίο ισχύει $n \to (m)^k_l$
- Όμοια ορίζουμε ως $R^*(m, k, l)$ τον μικρότερο φυσικό n, τέτοιο ώστε $n \overset{*}{\to} (m)^k_l$

Λίγη πεπερασμένη θεωρία Ramsey (III)

Λίγη ακόμα ορολογία

- Για $m, k, l \in \omega \setminus \{0\}$ αναπαριστούμε ως $R(m, k, l)$ τον ελάχιστο φυσικό αριθμό n για τον οποίο ισχύει $n \to (m)^k_l$
- Όμοια ορίζουμε ως $R^*(m, k, l)$ τον μικρότερο φυσικό n, τέτοιο ώστε $n \overset{*}{\to} (m)^k_l$

Θεώρημα Ketonen-Solovay

Το $R^*(m+1, m, m)$ ορίζει μια συνάρτηση από το $\omega \setminus \{0\}$ στο ω που αυξάνει ταχύτερα από οποιαδήποτε συνάρτηση από το $\omega \setminus \{0\}$ στο ω που είναι αποδείξιμα ολική στην Αριθμητική Peano (PA).

Λίγη πεπερασμένη θεωρία Ramsey (III)

Λίγη ακόμα ορολογία

- Για $m, k, l \in \omega \setminus \{0\}$ αναπαριστούμε ως $R(m, k, l)$ τον ελάχιστο φυσικό αριθμό n για τον οποίο ισχύει $n \to (m)^k_l$
- Όμοια ορίζουμε ως $R^*(m, k, l)$ τον μικρότερο φυσικό n, τέτοιο ώστε $n \overset{*}{\to} (m)^k_l$

Θεώρημα Ketonen-Solovay

Το $R^*(m+1, m, m)$ ορίζει μια συνάρτηση από το $\omega \setminus \{0\}$ στο ω που αυξάνει ταχύτερα από οποιαδήποτε συνάρτηση από το $\omega \setminus \{0\}$ στο ω που είναι αποδείξιμα ολική στην Αριθμητική Peano (PA).

??

Λίγη πεπερασμένη (?) θεωρία Ramsey (I)

- Η PA είναι μια αξιωματοποίηση της θεωρίας αριθμών.

Λίγη πεπερασμένη (?) θεωρία Ramsey (I)

- Η PA είναι μια αξιωματοποίηση της θεωρίας αριθμών.
- Τα κληρονομικά (hereditaly) πεπερασμένα (ΚΠ) σύνολα μπορούν να κωδικοποιηθούν σαν φυσικοί αριθμοί, και έχει δειχθεί ότι οι ιδιότητες των (ΚΠ) συνόλων που αποδεικνύονται στην PA είναι ακριβώς οι ιδιότητες που αποδεικνύονται στην ZFC, αν αντικαταστήσουμε το Αξίωμα του Απείρου από την άρνησή του.

Λίγη πεπερασμένη (?) θεωρία Ramsey (I)

- Η PA είναι μια αξιωματοποίηση της θεωρίας αριθμών.
- Τα κληρονομικά (hereditaly) πεπερασμένα (ΚΠ) σύνολα μπορούν να κωδικοποιηθούν σαν φυσικοί αριθμοί, και έχει δειχθεί ότι οι ιδιότητες των (ΚΠ) συνόλων που αποδεικνύονται στην PA είναι ακριβώς οι ιδιότητες που αποδεικνύονται στην ZFC, αν αντικαταστήσουμε το Αξίωμα του Απείρου από την άρνησή του.
- Έτσι τα θεωρήματα που αποδεικνύονται στην PA είναι ακριβώς τα θεωρήματα εκείνα που αφορούν (ΚΠ) σύνολα, τα οποία μπορούν να αποδειχθούν **χωρίς τη χρήση της έννοιας ενός άπειρου συνόλου**.

Λίγη πεπερασμένη (?) θεωρία Ramsey (II)

- Το θεώρημα Parris-Harrington αφορά (ΚΠ) σύνολα.

Λίγη πεπερασμένη (?) θεωρία Ramsey (II)

- Το θεώρημα Parris-Harrington αφορά (ΚΠ) σύνολα.
- Μπορούμε εύκολα να γράψουμε έναν αλγόριθμο, για τον υπολογισμό του $R^*(m+1, m, m)$.

Λίγη πεπερασμένη (?) θεωρία Ramsey (II)

- Το θεώρημα Parris-Harrington αφορά (ΚΠ) σύνολα.
- Μπορούμε εύκολα να γράψουμε έναν αλγόριθμο, για τον υπολογισμό του $R^*(m+1, m, m)$.
- Με βάση το θεώρημα Parris-Harrington, η $R^*(m+1, m, m)$ είναι ολική (ο παραπάνω αλγόριθμος τερματίζει για κάθε m).

Λίγη πεπερασμένη (?) θεωρία Ramsey (II)

- Το θεώρημα Parris-Harrington αφορά (ΚΠ) σύνολα.
- Μπορούμε εύκολα να γράψουμε έναν αλγόριθμο, για τον υπολογισμό του $R^*(m+1, m, m)$.
- Με βάση το θεώρημα Parris-Harrington, η $R^*(m+1, m, m)$ είναι ολική (ο παραπάνω αλγόριθμος τερματίζει για κάθε m).
- **Αλλά**, το παραπάνω, με βάση το θ. Ketonen-Solovay δεν μπορεί να αποδειχθεί στην PA.

Λίγη πεπερασμένη (?) θεωρία Ramsey (II)

- Το θεώρημα Parris-Harrington αφορά (ΚΠ) σύνολα.
- Μπορούμε εύκολα να γράψουμε έναν αλγόριθμο, για τον υπολογισμό του $R^*(m+1, m, m)$.
- Με βάση το θεώρημα Parris-Harrington, η $R^*(m+1, m, m)$ είναι ολική (ο παραπάνω αλγόριθμος τερματίζει για κάθε m).
- **Αλλά**, το παραπάνω, με βάση το θ. Ketonen-Solovay δεν μπορεί να αποδειχθεί στην PA.
- $\Rightarrow$ **Κάθε απόδειξη του θ Parris-Harrington πρέπει να χρησιμοποιεί άπειρα σύνολα**.

Βασική κατανόηση (I)

Περιγραφή της γενικευμένης αρχής του περιστεριώνα με συμβολισμό Ramsey

Θεώρημα

Για όλους τους άπειρους πληθαρίθμους k και για όλους τους $\sigma = cf(k)$ η σχέση $k \to (k)^1_\sigma$ ισχύει.

Βασική κατανόηση (I)

Περιγραφή της γενικευμένης αρχής του περιστεριώνα με συμβολισμό Ramsey

Θεώρημα

Για όλους τους άπειρους πληθαρίθμους k και για όλους τους $\sigma = cf(k)$ η σχέση $k \to (k)^1_\sigma$ ισχύει.

Ερμηνεία: αν k άπειρος πληθάριθμος, A σύνολο με $|A| = k$ και $A = \bigcup_{i<\sigma} A_i$, όπου $\sigma = cf(k)$, τότε υπάρχει $i < \sigma$ τέτοιο ώστε $|A_i| = k$.

Βασική κατανόηση (II)

Λήμμα

1. *Αν ισχύει* $\alpha \to (b)^n_c$ *και* $\alpha' \geq \alpha$, $b' \leq b$, $c' \leq c$ *τότε* $\alpha' \to (b')^n_{c'}$.
2. *Για τους άπειρους πληθαρίθμους* α, b, *αν* $m < n$ *και* $\alpha \to (b)^n_c$, *τότε* $\alpha \to (b)^m_c$

Απόδειξη.

1.
   - Έστω τυχαίος $c'-$χρωματισμός του $[A']^n$ όπου $|A'| = \alpha'$.
   - Εφαρμόζουμε τον παραπάνω χρωματισμό στο $[A]^n$, με $A \subseteq A'$, $|A| = \alpha$
   - Καθώς ο $c'-$χρωματισμός είναι ειδική περίπτωση ενός $c-$χρωματισμού, από υπόθεση έχουμε ότι υπάρχει $B \subseteq A \subseteq A'$, με $|B| = b$ που είναι ομογενές για τον παραπάνω χρωματισμό.
   - Έτσι κάθε $B' \subseteq B$ με $|B'| = b'$ είναι ομογενές για τον αρχικό χρωματισμό, άρα $\alpha' \to (b')^n_{c'}$

$\square$

Βασική κατανόηση (III)

Απόδειξη (cont.)

2.
   - Έστω $|A| = \alpha$ και $f : [A]^m \to C$ με $|C| = c$.
   - Ορίζουμε $f' : [A]^n \to C$ ως $f'(u) = f($το σύνολο των m μικρότερων στοιχείων του u$)$ (υπάρχουν, καθώς υπάρχει καλή διάταξη από AC).
   - Τότε, λόγω υπόθεσης υπάρχει $B \subseteq A$ με $|B| = b$ που είναι ομογενές για την f' και από κατασκευή και για την f.

$\square$

Συμπέρασμα: $\aleph_0 \to (b)^n_c$

Θεώρημα Ramsey (I)

Θεώρημα Ramsey

Για όλους τους θετικούς φυσικούς αριθμούς k, l:

$$\omega \to (\omega)^k_l.$$

Απόδειξη.

Με επαγωγή στο k

- Για $k = 1$ το είναι ειδική περίπτωση της αρχής του περιστεριώνα.
- Έστω ότι το θεώρημα ισχύει για k, δηλ. $\omega \to (\omega)^k_l$ για κάθε $l \in \omega$
- Έστω $P = \{P_i : i < l\}$ μια κατάτμηση του $[\omega]^{k+1}$ και f ο κανονικός χρωματισμός που συσχετίζεται με την P.

Θεώρημα Ramsey (II)

Απόδειξη. (cont.)

- Θα ορίσουμε μια αυστηρώς αύξουσα ακολουθία $(n_i)_{i<\omega}$ θετικών φυσικών αριθμών και μια φθίνουσα ακολουθία $(A_i)_{i<\omega}$ από άπειρα υποσύνολα του ω τέτοια ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:
  1. $\forall n \in A_i (n_i < n)$
  2. $\forall a, b \in [A_i]^k (f(\{n_i\} \cup a) = f(\{n_i\} \cup b))$

Θεώρημα Ramsey (II)

Απόδειξη. (cont.)

- Θα ορίσουμε μια αυστηρώς αύξουσα ακολουθία $(n_i)_{i<\omega}$ θετικών φυσικών αριθμών και μια φθίνουσα ακολουθία $(A_i)_{i<\omega}$ από άπειρα υποσύνολα του ω τέτοια ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:
  1. $\forall n \in A_i (n_i < n)$
  2. $\forall a, b \in [A_i]^k (f(\{n_i\} \cup a) = f(\{n_i\} \cup b))$
- Θέτουμε $n_0 = 0$ και για $a \in [\omega \setminus \{0\}]^k$ θέτουμε $f^{(0)}(a) = f(\{0\} \cup a)$. (χρωματισμός των υποσυνόλων μεγέθους k του $\omega \setminus \{0\}$ - μειώσαμε τον «εκθέτη» κατά 1)

Θεώρημα Ramsey (II)

Απόδειξη. (cont.)

- Θα ορίσουμε μια αυστηρώς αύξουσα ακολουθία $(n_i)_{i<\omega}$ θετικών φυσικών αριθμών και μια φθίνουσα ακολουθία $(A_i)_{i<\omega}$ από άπειρα υποσύνολα του ω τέτοια ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:
  1. $\forall n \in A_i (n_i < n)$
  2. $\forall a, b \in [A_i]^k (f(\{n_i\} \cup a) = f(\{n_i\} \cup b))$
- Θέτουμε $n_0 = 0$ και για $a \in [\omega \setminus \{0\}]^k$ θέτουμε $f^{(0)}(a) = f(\{0\} \cup a)$. (χρωματισμός των υποσυνόλων μεγέθους k του $\omega \setminus \{0\}$ - μειώσαμε τον «εκθέτη» κατά 1)
- Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση για να βρούμε ένα άπειρο $A_0 \subseteq \omega \setminus \{0\}$ που να είναι ομογενές για τον «επαγόμενο» χρωματισμό $f^{(0)}$.
- παρατηρούμε ότι το A_0 ικανοποιεί τις σχέσεις 1, 2.

Θεώρημα Ramsey (III)

Απόδειξη. (cont.)

- Έστω τώρα, ότι έχουν κατασκευαστεί τα n_i και A_i για $i < j$. Θέτουμε:

$$n_j = min\ A_{j-1}$$

Για $a \in [A_{j-1} \setminus \{n_j\}]^k$ θέτουμε $f^{(j)}(a) = f(\{n_j\} \cup a)$

- Χρησιμοποιούμε την επαγωγική υπόθεση για να βρούμε ένα υποσύνολο $A_j \subseteq A_{j-1} \setminus \{n_j\}$ που είναι ομογενές για τον επαγόμενο χρωματισμό $f^{(j)}$

Θεώρημα Ramsey (III)

Απόδειξη. (cont.)

- Έστω τώρα, ότι έχουν κατασκευαστεί τα n_i και A_i για $i < j$. Θέτουμε:

$$n_j = min\ A_{j-1}$$

  Για $a \in [A_{j-1} \setminus \{n_j\}]^k$ θέτουμε $f^{(j)}(a) = f(\{n_j\} \cup a)$
- Χρησιμοποιούμε την επαγωγική υπόθεση για να βρούμε ένα υποσύνολο $A_j \subseteq A_{j-1} \setminus \{n_j\}$ που είναι ομογενές για τον επαγόμενο χρωματισμό $f^{(j)}$
- Κατασκευάζουμε το σύνολο $K = \{n_i : i < \omega\}$

Θεώρημα Ramsey (III)

Απόδειξη. (cont.)

- Έστω τώρα, ότι έχουν κατασκευαστεί τα n_i και A_i για $i < j$. Θέτουμε:

$$n_j = min\ A_{j-1}$$

Για $a \in [A_{j-1} \setminus \{n_j\}]^k$ θέτουμε $f^{(j)}(a) = f(\{n_j\} \cup a)$

- Χρησιμοποιούμε την επαγωγική υπόθεση για να βρούμε ένα υποσύνολο $A_j \subseteq A_{j-1} \setminus \{n_j\}$ που είναι ομογενές για τον επαγόμενο χρωματισμό $f^{(j)}$
- Κατασκευάζουμε το σύνολο $K = \{n_i : i < \omega\}$
- Από κατασκευή των n_i και A_i :

$$\text{Αν } n \in K; a, b \in [K \setminus (n+1)]^k, \text{ τότε } f(\{n\} \cup a) = f(\{n\} \cup b)$$

Θεώρημα Ramsey (IV)

Απόδειξη. (cont.)

- Έστω τώρα $g : K \to \omega$ η συνάρτηση που αναθέτει σε κάθε $n \in K$ το $i < l$ για το οποίο

$$\forall a \in [K \setminus (n+1)]^k (f(\{n\} \cup a) = i).$$

Θεώρημα Ramsey (IV)

Απόδειξη. (cont.)

- Έστω τώρα $g : K \to \omega$ η συνάρτηση που αναθέτει σε κάθε $n \in K$ το $i < l$ για το οποίο

$$\forall a \in [K \setminus (n+1)]^k (f(\{n\} \cup a) = i).$$

- Διαλέγουμε $i_0 < l$ έτσι, ώστε $Y = g^{-1}(i_0)$ να είναι άπειρο.

Θεώρημα Ramsey (IV)

Απόδειξη. (cont.)

- Έστω τώρα $g : K \to \omega$ η συνάρτηση που αναθέτει σε κάθε $n \in K$ το $i < l$ για το οποίο

$$\forall a \in [K \setminus (n+1)]^k (f(\{n\} \cup a) = i).$$

- Διαλέγουμε $i_0 < l$ έτσι, ώστε $Y = g^{-1}(i_0)$ να είναι άπειρο.
- Το Y είναι ομογενές για τον f, καθώς αν $a \in [Y]^{k+l}$ και $m = min\ a$ έχουμε:

$$f(a) = f(\{m\} \cup (a \setminus \{m\})) = g(m) = i_0,$$

Ανεξάρτητα από την επιλογή του a.

Τι γίνεται με το ω_1; (I)

- Δείξαμε ότι για κάθε φυσικούς k, l, $\omega \to (\omega)^k_l$

Τι γίνεται με το ω_1; (I)

- Δείξαμε ότι για κάθε φυσικούς k, l, $\omega \to (\omega)^k_l$
- Τι γίνεται για μεγαλύτερους πληθάριθμους; Ισχύει πχ. το $\omega_1 \to (\omega_1)^k_l$

Τι γίνεται με το ω_1; (I)

- Δείξαμε ότι για κάθε φυσικούς k, l, $\omega \to (\omega)^k_l$
- Τι γίνεται για μεγαλύτερους πληθάριθμους; Ισχύει πχ. το $\omega_1 \to (\omega_1)^k_l$

Θεώρημα

$\omega_1 \nrightarrow (\omega_1)^2_2$.

Τι γίνεται με το ω_1; (I)

- Δείξαμε ότι για κάθε φυσικούς k, l, $\omega \to (\omega)^k_l$
- Τι γίνεται για μεγαλύτερους πληθάριθμους; Ισχύει πχ. το $\omega_1 \to (\omega_1)^k_l$

Θεώρημα

$\omega_1 \nrightarrow (\omega_1)^2_2$.

Πρώτα θα αποδείξουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα

$2^k \nrightarrow (k^+)^2_2$ *για κάθε άπειρο πληθάριθμο* κ.

Τι γίνεται με το ω_1; (I)

- Δείξαμε ότι για κάθε φυσικούς k, l, $\omega \to (\omega)^k_l$
- Τι γίνεται για μεγαλύτερους πληθάριθμους; Ισχύει πχ. το $\omega_1 \to (\omega_1)^k_l$

Θεώρημα

$\omega_1 \nrightarrow (\omega_1)^2_2$.

Πρώτα θα αποδείξουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα

$2^k \nrightarrow (k^+)^2_2$ *για κάθε άπειρο πληθάριθμο* κ.

Τι γίνεται με το ω_1; (II)

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε τα ακόλουθα.

Ορισμός

Έστω α και β διατακτικοί. Ορίζουμε την **λεξικογραφική διάταξη**, $<_l$ στο ${}^{\alpha}\beta$ ως εξής.: Αν $f, g \in {}^{\alpha}\beta$, τότε $f <_l g$ ανν υπάρχει $\gamma < \beta$ τέτοιο ώστε $f(\gamma) < g(\gamma)$ και $f(\delta) = g(\delta)$ για όλα τα $\delta < \gamma$. Η λεξικογραφική διάταξη είναι αυστηρώς γραμμική διάταξη.

Λήμμα

Στην $\langle {}^{k}2, \leq_l \rangle$ δεν υπάρχουν αυστηρά αύξουσες ή αυστηρά φθίνουσες άπειρες ακολουθίες μήκους k^+

Τι γίνεται με το ω_1; (III)

Απόδειξη

- Έστω $(f_a)_{a<2^k}$ μια απαρίθμηση του ${}^k2$ και έστω $\leq_l$ η λεξικογραφική διάταξη του ${}^k2$
- Ορίζουμε την κατάτμηση $P = \{P_0, P_1\}$ ως εξής:

$$\begin{aligned} P_0 &= \{\{\alpha, \beta\} : f_\alpha <_l f_\beta \text{ και } \alpha < \beta\} \\ P_1 &= [2^k]^2 \setminus P_0 \end{aligned}$$

Τι γίνεται με το ω_1; (III)

Απόδειξη

- Έστω $(f_a)_{a<2^k}$ μια απαρίθμηση του ${}^k2$ και έστω $\leq_l$ η λεξικογραφική διάταξη του ${}^k2$
- Ορίζουμε την κατάτμηση $P = \{P_0, P_1\}$ ως εξής:

$$\begin{aligned} P_0 &= \{\{\alpha, \beta\} : f_\alpha <_l f_\beta \text{ και } \alpha < \beta\} \\ P_1 &= [2^k]^2 \setminus P_0 \end{aligned}$$

- Έτσι το P_0 είναι το σύνολο των ζευγών στα οποία η λεξικογραφική σειρά συμφωνεί με την απαρίθμηση, και το P_1 το σύνολο των ζευγών στα οποία η απαρίθμηση αντιστρέφει την λεξικογραφική σειρά.

Τι γίνεται με το ω_1; (IV)

Απόδειξη (cont.)

- Αλλά αν το Y είναι ομογενές για την P, τότε το Y έχει μια μονότονη ακολουθία μήκους $|U|$ στο ${}^k2$, άρα από το παραπάνω λήμμα $|U| < k^+$.

$\square$

Τι γίνεται με το ω_1; (IV)

Απόδειξη (cont.)

- Αλλά αν το Y είναι ομογενές για την P, τότε το Y έχει μια μονότονη ακολουθία μήκους $|U|$ στο ${}^k2$, άρα από το παραπάνω λήμμα $|U| < k^+$.

$\square$

- Έτσι δείξαμε ότι $2^k \nrightarrow (k^+)^2_2$

Τι γίνεται με το ω_1; (IV)

Απόδειξη (cont.)

- Αλλά αν το Y είναι ομογενές για την P, τότε το Y έχει μια μονότονη ακολουθία μήκους $|U|$ στο ${}^k2$, άρα από το παραπάνω λήμμα $|U| < k^+$.

$\square$

- Έτσι δείξαμε ότι $2^k \nrightarrow (k^+)^2_2$
- Αλλά για ω η σχέση γίνεται $2^\omega \nrightarrow (\omega_1)^2_2$ με $2^\omega \geq \omega_1$ (εξαρτάται από το αν ισχύει η υπόθεση του συνεχούς.) Άρα $\omega_1 \nrightarrow (\omega_1)^2_2$

Θεώρημα Erdos-Rado (I)

- Είδαμε ότι $\omega_1 \nrightarrow (\omega_1)^2_2$.

Θεώρημα Erdos-Rado (I)

- Είδαμε ότι $\omega_1 \nrightarrow (\omega_1)^2_2$.
- Υπάρχει όμως κάποιο k τέτοιο ώστε $k \rightarrow (\omega_1)^2_2$;

Ορισμός

Έστω k τυχαίος πληθάριθμος. Ορίζουμε αναδρομικά, για $n \in \omega$:

$$\begin{aligned} exp_0(k) &= k \\ exp_{n+1}(k) &= 2^{exp_n(k)} \end{aligned}$$

Θεώρημα Erdos-Rado

$(exp_n(k))^+ \rightarrow (k^+)^{n+1}_k$ για κάθε άπειρο πληθάριθμο k και $n \in \omega$

Θεώρημα Erdos-Rado (I)

- Είδαμε ότι $\omega_1 \nrightarrow (\omega_1)^2_2$.
- Υπάρχει όμως κάποιο k τέτοιο ώστε $k \rightarrow (\omega_1)^2_2$;

Ορισμός

Έστω k τυχαίος πληθάριθμος. Ορίζουμε αναδρομικά, για $n \in \omega$:

$$\begin{aligned} exp_0(k) &= k \\ exp_{n+1}(k) &= 2^{exp_n(k)} \end{aligned}$$

Θεώρημα Erdos-Rado

$(exp_n(k))^+ \rightarrow (k^+)^{n+1}_k$ για κάθε άπειρο πληθάριθμο k και $n \in \omega$

Παρατηρήστε, ότι εδώ έχουμε άπειρα χρώματα.

Θεώρημα Erdos-Rado (II)

Μερικά παραδείγματα

- Για $n = 0$, $k^+ \to (k^+)^1_k$, ειδική περίπτωση αρχής περιστεριώνα.
- Για $n = 1$, $(2^k)^+ \to (k^+)^2_k$, (το θετικό αποτέλεσμα που ψάχναμε..)
- Για $n = 2$, $(2^{2^k})+ \to (k^+)^3_k$

Απόδειξη (μισή)

- Επαγωγικά.

Θεώρημα Erdos-Rado (II)

Μερικά παραδείγματα

- Για $n = 0$, $k^+ \to (k^+)^1_k$, ειδική περίπτωση αρχής περιστεριώνα.
- Για $n = 1$, $(2^k)^+ \to (k^+)^2_k$, (το θετικό αποτέλεσμα που ψάχναμε..)
- Για $n = 2$, $(2^{2^k})+ \to (k^+)^3_k$

Απόδειξη (μισή)

- Επαγωγικά.
- Είδαμε ότι για $n = 0$ είναι ειδική περίπτωση της αρχής του περιστεριώνα.

Θεώρημα Erdos-Rado (II)

Μερικά παραδείγματα

- Για $n = 0$, $k^+ \to (k^+)^1_k$, ειδική περίπτωση αρχής περιστεριώνα.
- Για $n = 1$, $(2^k)^+ \to (k^+)^2_k$, (το θετικό αποτέλεσμα που ψάχναμε..)
- Για $n = 2$, $(2^{2^k})+ \to (k^+)^3_k$

Απόδειξη (μισή)

- Επαγωγικά.
- Είδαμε ότι για $n = 0$ είναι ειδική περίπτωση της αρχής του περιστεριώνα.
- Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n > 0$, δηλ. $(exp_{n-1}(k))^+ \to (k^+)^n_k$

Θεώρημα Erdos-Rado (II)

Μερικά παραδείγματα

- Για $n = 0$, $k^+ \to (k^+)^1_k$, ειδική περίπτωση αρχής περιστεριώνα.
- Για $n = 1$, $(2^k)^+ \to (k^+)^2_k$, (το θετικό αποτέλεσμα που ψάχναμε..)
- Για $n = 2$, $(2^{2^k})+ \to (k^+)^3_k$

Απόδειξη (μισή)

- Επαγωγικά.
- Είδαμε ότι για $n = 0$ είναι ειδική περίπτωση της αρχής του περιστεριώνα.
- Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n > 0$, δηλ. $(exp_{n-1}(k))^+ \to (k^+)^n_k$
- Για ευκολία, θέτουμε $\lambda = exp_{n-1}(k)$, $\mu = (exp_n(k))^+$

Θεώρημα Erdos-Rado (II)

Μερικά παραδείγματα

- Για $n = 0$, $k^+ \to (k^+)^1_k$, ειδική περίπτωση αρχής περιστεριώνα.
- Για $n = 1$, $(2^k)^+ \to (k^+)^2_k$, (το θετικό αποτέλεσμα που ψάχναμε..)
- Για $n = 2$, $(2^{2^k})+ \to (k^+)^3_k$

Απόδειξη (μισή)

- Επαγωγικά.
- Είδαμε ότι για $n = 0$ είναι ειδική περίπτωση της αρχής του περιστεριώνα.
- Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n > 0$, δηλ. $(exp_{n-1}(k))^+ \to (k^+)^n_k$
- Για ευκολία, θέτουμε $\lambda = exp_{n-1}(k)$, $\mu = (exp_n(k))^+$
- Παίρνουμε έναν χρωματισμό $f : [\mu]^{n+1} \to k$

Θεώρημα Erdos-Rado (III)

Απόδειξη (μισή) (cont.)

- **Λήμμα**: Υπάρχει ένα δέντρο $\langle T \leq_T \rangle$ ύψους $\lambda^+ + 1$ και μια 1-1 $h : T \to \mu$, τέτοιο ώστε για όλα τα $s, t \in T$ με $s <_T t$ και όλα τα $a \in [\hat{s}]^n$ ισχύει $f(h[a] \cup \{h(s)\}) = f(h[a] \cup \{h(t)\})$

Θεώρημα Erdos-Rado (III)

Απόδειξη (μισή) (cont.)

- **Λήμμα**: Υπάρχει ένα δέντρο $\langle T \leq_T \rangle$ ύψους $\lambda^+ + 1$ και μια 1-1 $h : T \to \mu$, τέτοιο ώστε για όλα τα $s, t \in T$ με $s <_T t$ και όλα τα $a \in [\hat{s}]^n$ ισχύει $f(h[a] \cup \{h(s)\}) = f(h[a] \cup \{h(t)\})$
- Δεδομένων T, h όπως στο λήμμα, «φιξάρουμε» οποιοδήποτε t στο κορυφαίο επίπεδο του T

Θεώρημα Erdos-Rado (III)

Απόδειξη (μισή) (cont.)

- **Λήμμα**: Υπάρχει ένα δέντρο $\langle T \leq_T \rangle$ ύψους $\lambda^+ + 1$ και μια 1-1 $h : T \to \mu$, τέτοιο ώστε για όλα τα $s, t \in T$ με $s <_T t$ και όλα τα $a \in [\hat{s}]^n$ ισχύει $f(h[a] \cup \{h(s)\}) = f(h[a] \cup \{h(t)\})$
- Δεδομένων T, h όπως στο λήμμα, «φιξάρουμε» οποιοδήποτε t στο κορυφαίο επίπεδο του T
- Έστω $A = \{h(s) : s \in \hat{t}\}$

Θεώρημα Erdos-Rado (III)

Απόδειξη (μισή) (cont.)

- **Λήμμα**: Υπάρχει ένα δέντρο $\langle T \leq_T \rangle$ ύψους $\lambda^+ + 1$ και μια 1-1 $h : T \to \mu$, τέτοιο ώστε για όλα τα $s, t \in T$ με $s <_T t$ και όλα τα $a \in [\hat{s}]^n$ ισχύει $f(h[a] \cup \{h(s)\}) = f(h[a] \cup \{h(t)\})$
- Δεδομένων T, h όπως στο λήμμα, «φιξάρουμε» οποιοδήποτε t στο κορυφαίο επίπεδο του T
- Έστω $A = \{h(s) : s \in \hat{t}\}$
- Ορίζουμε έναν επαγόμενο χρωματισμό $f_* : [A]^n \to k$:

$$f_*(a) = f(a \cup \{h(t)\})$$

Θεώρημα Erdos-Rado (III)

Απόδειξη (μισή) (cont.)

- **Λήμμα**: Υπάρχει ένα δέντρο $\langle T \leq_T \rangle$ ύψους $\lambda^+ + 1$ και μια 1-1 $h : T \to \mu$, τέτοιο ώστε για όλα τα $s, t \in T$ με $s <_T t$ και όλα τα $a \in [\hat{s}]^n$ ισχύει $f(h[a] \cup \{h(s)\}) = f(h[a] \cup \{h(t)\})$
- Δεδομένων T, h όπως στο λήμμα, «φιξάρουμε» οποιοδήποτε t στο κορυφαίο επίπεδο του T
- Έστω $A = \{h(s) : s \in \hat{t}\}$
- Ορίζουμε έναν επαγόμενο χρωματισμό $f_* : [A]^n \to k$:

$$f_*(a) = f(a \cup \{h(t)\})$$

- Αφού $|A| = \lambda^+$ από επαγωγική υπόθεση η f_* έχει ένα ομογενές $D \subseteq A$ μεγέθους k^+.

□

Θεώρημα Erdos-Rado (IV)

Μπορεί το θεώρημα να ισχυροποιηθεί, σε $exp_n(k) \to (k^+)^{n+1}_k$;

Θεώρημα Erdos-Rado (IV)

Μπορεί το θεώρημα να ισχυροποιηθεί, σε $exp_n(k) \to (k^+)^{n+1}_k$; Για $n = 1$

Θεώρημα

$2^k \nrightarrow (3)^2_k$ *για κάθε άπειρο πληθάριθμο* k.

Θεώρημα Erdos-Rado (IV)

Μπορεί το θεώρημα να ισχυροποιηθεί, σε $exp_n(k) \to (k^+)^{n+1}_k$; Για $n = 1$

Θεώρημα

$2^k \nrightarrow (3)^2_k$ *για κάθε άπειρο πληθάριθμο* k.

Απόδειξη.

- Για δεδομένο k, για $f, g \in {}^k2$ έστω $\Delta(f, g) = min\{\delta : f(\delta) \neq g(\delta)\}$

Θεώρημα Erdos-Rado (IV)

Μπορεί το θεώρημα να ισχυροποιηθεί, σε $exp_n(k) \to (k^+)^{n+1}_k$; Για $n = 1$

Θεώρημα

$2^k \nrightarrow (3)^2_k$ *για κάθε άπειρο πληθάριθμο* k.

Απόδειξη.

- Για δεδομένο k, για $f, g \in {}^k2$ έστω $\Delta(f, g) = min\{\delta : f(\delta) \neq g(\delta)\}$
- Ορίζουμε

$$P_a = \{\{f, g\} : f, g \in {}^k2 \text{ και } \Delta(f, g) = a\}$$

Θεώρημα Erdos-Rado (IV)

Μπορεί το θεώρημα να ισχυροποιηθεί, σε $exp_n(k) \to (k^+)^{n+1}_k$; Για $n = 1$

Θεώρημα

$2^k \nrightarrow (3)^2_k$ *για κάθε άπειρο πληθάριθμο* k.

Απόδειξη.

- Για δεδομένο k, για $f, g \in {}^k2$ έστω $\Delta(f, g) = min\{\delta : f(\delta) \neq g(\delta)\}$
- Ορίζουμε

$$P_a = \{\{f, g\} : f, g \in {}^k2 \text{ και } \Delta(f, g) = a\}$$

- Η οικογένεια $\{P_a : a < k\}$ είναι μια κατάτμηση ενός συνόλου με πληθάριθμο 2^k σε k κομμάτια, για την οποία δεν υπάρχει ομογενές σύνολο μεγέθους 3 (Γιατί;).

□

Θεώρημα Erdos-Rado (V)

Μπορεί το θεώρημα να ισχυροποιηθεί, σε $exp_n(k) \to (k^+)^{n+1}_k$; Για $n > 1$

Λήμμα «Negative Stepping-Up Lemma»

Έστω $n \geq 2$ και k, λ, σ πληθάριθμοι, τέτοιοι ώστε k, λ άπειροι, λ κανονικός και $k \nrightarrow (\lambda)^n_\sigma$. Τότε $2^k \nrightarrow (\lambda)^{n+1}_s$

Θεώρημα Erdos-Rado (V)

Μπορεί το θεώρημα να ισχυροποιηθεί, σε $exp_n(k) \to (k^+)^{n+1}_k$; Για $n > 1$

Λήμμα «Negative Stepping-Up Lemma»

Έστω $n \geq 2$ και k, λ, σ πληθάριθμοι, τέτοιοι ώστε k, λ άπειροι, λ κανονικός και $k \nrightarrow (\lambda)^n_\sigma$. Τότε $2^k \nrightarrow (\lambda)^{n+1}_s$

Συμπέρασμα: $exp_n(k) \nrightarrow (k^+)^{n+1}_2$ (δεν μπορούμε να βγάλουμε το $+$ από τη δεξιά μεριά.

Ασθενώς συμπαγείς πληθάριθμοι(I)

- Είδαμε ότι $\omega_1 \nrightarrow (\omega_1)^2_2$

Ασθενώς συμπαγείς πληθάριθμοι(I)

- Είδαμε ότι $\omega_1 \nrightarrow (\omega_1)^2_2$
- Το επόμενο ερώτημα είναι, υπάρχει μη αριθμήσιμος πληθάριθμος, τέτοιος ώστε $k \rightarrow (k)^2_2$;

Ορισμός

Ένας πληθάριθμος k ονομάζεται **ασθενώς συμπαγής**, αν είναι μη αριθμήσιμος και $k \rightarrow (k)^2_2$.

Λήμμα

Οι ασθενώς συμπαγείς πληθάριθμοι είναι κανονικοί.

Ασθενώς συμπαγείς πληθάριθμοι (II)

Απόδειξη.

- Έστω $cf(k) = \lambda < k$

Ασθενώς συμπαγείς πληθάριθμοι (II)

Απόδειξη.

- Έστω $cf(k) = \lambda < k$
- Θα δείξουμε ότι ο k δεν είναι ασθενώς συμπαγής, κατασκευάζοντας μια συνάρτηση $f : [k]^2 \to 2$ χωρίς ομογενές υποσύνολο μεγέθους κ.

Ασθενώς συμπαγείς πληθάριθμοι (II)

Απόδειξη.

- Έστω $cf(k) = \lambda < k$
- Θα δείξουμε ότι ο k δεν είναι ασθενώς συμπαγής, κατασκευάζοντας μια συνάρτηση $f : [k]^2 \to 2$ χωρίς ομογενές υποσύνολο μεγέθους κ.
- έστω $(k_i)_{i<\lambda}$ μια αύξουσα ακολουθία πληθαρίθμων με $sup\{k_i : i < \lambda\} = k$

Ασθενώς συμπαγείς πληθάριθμοι (II)

Απόδειξη.

- Έστω $cf(k) = \lambda < k$
- Θα δείξουμε ότι ο k δεν είναι ασθενώς συμπαγής, κατασκευάζοντας μια συνάρτηση $f : [k]^2 \to 2$ χωρίς ομογενές υποσύνολο μεγέθους κ.
- έστω $(k_i)_{i<\lambda}$ μια αύξουσα ακολουθία πληθαρίθμων με $sup\{k_i : i < \lambda\} = k$
- Ορίζουμε την f ως:

$$f(a, b) = 0 \text{ ανν } \forall i < \lambda(a < k_i \leftrightarrow b < k_i)$$

Ασθενώς συμπαγείς πληθάριθμοι (II)

Απόδειξη.

- Έστω $cf(k) = \lambda < k$
- Θα δείξουμε ότι ο k δεν είναι ασθενώς συμπαγής, κατασκευάζοντας μια συνάρτηση $f : [k]^2 \to 2$ χωρίς ομογενές υποσύνολο μεγέθους κ.
- έστω $(k_i)_{i<\lambda}$ μια αύξουσα ακολουθία πληθαρίθμων με $sup\{k_i : i < \lambda\} = k$
- Ορίζουμε την f ως:

$$f(a, b) = 0 \text{ ανν } \forall i < \lambda(a < k_i \leftrightarrow b < k_i)$$

- Έστω τώρα $X \subseteq k$ ομογενές για την f.

Ασθενώς συμπαγείς πληθάριθμοι (II)

Απόδειξη.

- Έστω $cf(k) = \lambda < k$
- Θα δείξουμε ότι ο k δεν είναι ασθενώς συμπαγής, κατασκευάζοντας μια συνάρτηση $f : [k]^2 \to 2$ χωρίς ομογενές υποσύνολο μεγέθους κ.
- έστω $(k_i)_{i<\lambda}$ μια αύξουσα ακολουθία πληθαρίθμων με $sup\{k_i : i < \lambda\} = k$
- Ορίζουμε την f ως:

$$f(a, b) = 0 \text{ ανν } \forall i < \lambda(a < k_i \leftrightarrow b < k_i)$$

- Έστω τώρα $X \subseteq k$ ομογενές για την f.
- Αν $f(\{a, b\}) = 1$ για όλα τα $\{a, b\} \in [X]^2$, τότε $|X| \leq \lambda < k$

Ασθενώς συμπαγείς πληθάριθμοι (II)

Απόδειξη.

- Έστω $cf(k) = \lambda < k$
- Θα δείξουμε ότι ο k δεν είναι ασθενώς συμπαγής, κατασκευάζοντας μια συνάρτηση $f : [k]^2 \to 2$ χωρίς ομογενές υποσύνολο μεγέθους κ.
- έστω $(k_i)_{i<\lambda}$ μια αύξουσα ακολουθία πληθαρίθμων με $sup\{k_i : i < \lambda\} = k$
- Ορίζουμε την f ως:

$$f(a, b) = 0 \text{ ανν } \forall i < \lambda(a < k_i \leftrightarrow b < k_i)$$

- Έστω τώρα $X \subseteq k$ ομογενές για την f.
- Αν $f(\{a, b\}) = 1$ για όλα τα $\{a, b\} \in [X]^2$, τότε $|X| \leq \lambda < k$
- $X \subseteq k_i$ για $i < k$, άρα και πάλι $|X| < k$.

□

Ασθενώς συμπαγείς πληθάριθμοι (III)

Μια σύνδεση με τα προηγούμενα..

- Τα παραπάνω συνεπάγονται ότι οι ασθενώς συμπαγείς πληθάριθμοι είναι "strongly inaccesible" (μη αριθμήσιμοι

Ασθενώς συμπαγείς πληθάριθμοι (III)

Μια σύνδεση με τα προηγούμενα..

- Τα παραπάνω συνεπάγονται ότι οι ασθενώς συμπαγείς πληθάριθμοι είναι "strongly inaccesible" (μη αριθμήσιμοι
- Έτσι είναι ένα παράδειγμα μεγάλων πληθαρίθμων. (Ο ορισμός τους γενικεύει μια ιδιότητα το ω)

Ασθενώς συμπαγείς πληθάριθμοι (III)

Μια σύνδεση με τα προηγούμενα..

- Τα παραπάνω συνεπάγονται ότι οι ασθενώς συμπαγείς πληθάριθμοι είναι "strongly inaccesible" (μη αριθμήσιμοι
- Έτσι είναι ένα παράδειγμα μεγάλων πληθαρίθμων. (Ο ορισμός τους γενικεύει μια ιδιότητα το ω)
- Η ύπαρξή τους συνεπάγεται την συνέπεια της ZFC

Ασθενώς συμπαγείς πληθάριθμοι (III)

Μια σύνδεση με τα προηγούμενα..

- Τα παραπάνω συνεπάγονται ότι οι ασθενώς συμπαγείς πληθάριθμοι είναι "strongly inaccesible" (μη αριθμήσιμοι
- Έτσι είναι ένα παράδειγμα μεγάλων πληθαρίθμων. (Ο ορισμός τους γενικεύει μια ιδιότητα το ω)
- Η ύπαρξή τους συνεπάγεται την συνέπεια της ZFC
- $\Rightarrow$ Η ύπαρξή τους δεν είναι αποδείξημη στην ZFC

Κατατμήσεις διαφορετικών μεγεθών (I)

- Μέχρι τώρα είχαμε κατατμήσεις (χρώματα) και ρωτάγαμε αν υπάρχει ομογενές σύνολο κάποιου μεγέθους για αυτήν την κατάτμηση (που να έχει πάρει ένα χρώμα).

Κατατμήσεις διαφορετικών μεγεθών (I)

- Μέχρι τώρα είχαμε κατατμήσεις (χρώματα) και ρωτάγαμε αν υπάρχει ομογενές σύνολο κάποιου μεγέθους για αυτήν την κατάτμηση (που να έχει πάρει ένα χρώμα).
- Μας ενδιαφέρει όμως και το ερώτημα, αν υπάρχουν ομογενή σύνολα συγκεκριμένων μεγεθών (διαφορετικών μεταξύ τους) που να «έχουν χρωματιστεί» από συγκεκριμένα χρώματα ή όχι.

Κατατμήσεις διαφορετικών μεγεθών (I)

- Μέχρι τώρα είχαμε κατατμήσεις (χρώματα) και ρωτάγαμε αν υπάρχει ομογενές σύνολο κάποιου μεγέθους για αυτήν την κατάτμηση (που να έχει πάρει ένα χρώμα).
- Μας ενδιαφέρει όμως και το ερώτημα, αν υπάρχουν ομογενή σύνολα συγκεκριμένων μεγεθών (διαφορετικών μεταξύ τους) που να «έχουν χρωματιστεί» από συγκεκριμένα χρώματα ή όχι.
- Για παράδειγμα, έχουμε δει ότι $\omega_1 \not\to (\omega_1)^2_2$, είναι όμως δυνατόν να μην υπάρχει ούτε μη αριθμήσιμο ομογενές σύνολο χρώματος 1, ούτε άπειρο ομογενές σύνολο χρώματος 0;

Κατατμήσεις διαφορετικών μεγεθών (II)

Ορισμός

Έστω $n \in \omega \setminus \{0\}$, σ διατακτικός αριθμός, k, λ_i πληθάριθμοι για $i < \sigma$.
Το σύμβολο $k \to (\lambda_i)^n_{i<\sigma}$ σημαίνει:
Για κάθε κατάτμηση $P = \{P_i : i < \sigma\}$ του $[k]^n$ υπάρχει ένα $i < \sigma$ και ένα ομογενές σύνολο A χρώματος i και πληθικότητας λ_i

Κατατμήσεις διαφορετικών μεγεθών (II)

Ορισμός

Έστω $n \in \omega \setminus \{0\}$, σ διατακτικός αριθμός, k, λ_i πληθάριθμοι για $i < \sigma$.
Το σύμβολο $k \to (\lambda_i)^n_{i<\sigma}$ σημαίνει:
Για κάθε κατάτμηση $P = \{P_i : i < \sigma\}$ του $[k]^n$ υπάρχει ένα $i < \sigma$ και ένα ομογενές σύνολο A χρώματος i και πληθικότητας λ_i

Έτσι το παραπάνω ερώτημα γράφεται: $\omega_1 \nrightarrow (\omega_1, \omega)^2$

Κατατμήσεις διαφορετικών μεγεθών (II)

Ορισμός

Έστω $n \in \omega \setminus \{0\}$, σ διατακτικός αριθμός, k, λ_i πληθάριθμοι για $i < \sigma$.
Το σύμβολο $k \to (\lambda_i)^n_{i<\sigma}$ σημαίνει:
Για κάθε κατάτμηση $P = \{P_i : i < \sigma\}$ του $[k]^n$ υπάρχει ένα $i < \sigma$ και ένα ομογενές σύνολο A χρώματος i και πληθικότητας λ_i

Έτσι το παραπάνω ερώτημα γράφεται: $\omega_1 \nrightarrow (\omega_1, \omega)^2$

Θεώρημα. Erdos-Dushnik-Miller

Αν k άπειρος πληθάριθμος, τότε $k \to (k, \omega)^2$.

Βιβλιογραφία

W. Just, M. Weese.
Discovering Modern Set Theory II.
American Mathematical Society, 1997.

A. Hajnal, P. Hamburger.
Set Theory.
Cambridge University Press, 1999

N.H. Williams.
Combinatorial Set Theory.
North-Holland, 1977

P. Erdos, A. Hajnal, A. Mate, R. Rado.
Combinatorial Set Theory: Partition Relations for Cardinals.
North-Holland, 1984

Βιβλιογραφία

P.F. Ramsey.
On a Problem of Formal Logic.
Proc. London Math. Soc., 1930, series 2, vol. 30, pp.264-286